# Matemaattisten tieteiden valintakoe

# 31.5.2021 klo 9.00–12.00

Kirjoita nimesi ja henkilötunnuksesi tekstaamalla isoilla latinalaisilla kirjaimilla (ABCD...).
Jos sinulla ei ole suomalaista henkilötunnusta, kirjoita sen asemesta syntymäaikasi.
Kirjoita henkilötiedot kaikille sivuille

| | |
|---|---|
| Sukunimi | |
| Kaikki etunimet | |
| Henkilötunnus | |

Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamasi vastaukset arvostellaan, jätä alla oleva laatikko tyhjäksi.
Jos haluat, että tehtäviin kirjoittamiasi vastauksia ei arvostella, kirjoita alla olevaan laatikkoon teksti "*Haluan, että vastauksiani ei arvostella*". Tässä tapauksessa saat vastauksistasi nolla pistettä.

| | |
|---|---|
| Arvostelusta luopuminen | |

## Lue huolellisesti kaikki ohjeet läpi

- Tarkista, että saamassasi koenipussa on kansilehden ja ohjesivujen (sivut 1–2) lisäksi:
    - kysymys- ja vastausosio (sivut 3–8)
    - yksi ruutupaperiarkki omia muistiinpanoja varten (konseptipaperi)
    - laskin.

- Tehtävien vastaukset kirjoitetaan kysymys- ja vastausosioon.

- **Tarkista, että olet kirjoittanut nimesi ja henkilötunnuksesi kaikkiin vastauspapereihin.**

- Kirjoita vastauksesi
    - suomeksi tai ruotsiksi. Muilla kielillä kirjoitettuja vastauksia ei huomioida arvostelussa.
    - koemonisteelle. Kirjoita kukin vastaus kyseisen kysymyksen alle. Voit tarvittaessa jatkaa minkä tahansa tehtävän vastausta sivulle 8.
    - lyijykynällä ja selvällä käsialalla. Arvostelija tulkitsee tulkinnanvaraiset merkinnät vähiten pisteitä tuottavan vaihtoehdon mukaisesti.

- Älä kirjoita vaihtoehtoisia vastauksia. Jos kirjoitat vaihtoehtoisia vastauksia, arvostelussa huomioidaan vain vastaus, josta saat vähiten pisteitä.

- Voit luonnostella vastauksiasi ruutupaperille. Ruutupaperille tekemiäsi merkintöjä ei huomioida arvostelussa. Olet saanut yhden arkin ruutupaperia. Voit tarvittaessa pyytää lisää ruutupaperia valvojalta.

- Pidä koemateriaalisi niin, että lähelläsi istuvat hakijat eivät pysty katsomaan vastauksiasi ja merkintöjäsi.

## Pisteyttäminen

Valintakoe pisteytetään asteikolla 0–50. Tehtäväkohtaiset pisteet on ilmoitettu kunkin tehtävän kohdalla.

## Valintakoekirjallisuus

Valintakokeen tehtävät perustuvat lukion matematiikan pitkään oppimäärään (9 kurssia, lukion opetussuunnitelman perusteet 2015 mukaisesti).

## Tehtävä 1 (10 pistettä)

Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.

(a) $x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 2x - 1$, (2 pistettä)
(b) $\lg x + \lg(x - 3) = 1$, (2 pistettä)
(c) $4\cos^2 x < 1$, (3 pistettä)
(d) $\frac{4x}{x-3} \leq 1$. (3 pistettä)

## Tehtävä 2 (10 pistettä)

Määritä funktion $f(x) = \cos x \sin^5 x$ se integraalifunktio *F*, jolle *F*(0) = 3.

## Tehtävä 3 (10 pistettä)

Suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on 3, pyörähtää toisen kateettinsa ympäri. Laske näin syntyvän pyörähdyskappaleen suurin mahdollinen tilavuus.

## Tehtävä 4 (10 pistettä)

Antti onnistuu rangaistuspotkussa todennäköisyydellä 0,8 ja Pekka onnistuu todennäköisyydellä 0,7. Kumpikin potkaisee yhden rangaistuspotkun. Mikä on todennäköisyys, että he

(a) saavat kaksi maalia, (3 pistettä)
(b) eivät saa yhtään maalia, (3 pistettä)
(c) saavat yhden maalin? (4 pistettä)

## Tehtävä 5 (10 pistettä)

Lukujonon $(a_n)$ ensimmäinen jäsen on $a_1 = -2\frac{1}{3}$ ja muut jäsenet määritellään rekursiivisesti kaavalla $a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{2}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$ . Laske lukujonon

(a) kolmas jäsen $a_3$, (2 pistettä)
(b) yleinen $n$. jäsen $a_n$, (4 pistettä)
(c) raja-arvo $\lim_{n\to\infty} a_n$. (4 pistettä)

**Helsingin yliopisto**
**Päähaku, matemaattisten tieteiden kandiohjelma**
**Valintakoe 31.5.2021 – Ratkaisut ja pisteytys**

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $x^2 - 3x + 2 = -x^2 + 2x - 1$, (2 p.)
   (b) $\lg x + \lg(x-3) = 1$, (2 p.)
   (c) $4\cos^2 x < 1$, (3 p.)
   (d) $\dfrac{4x}{x-3} \leq 1$. (3 p.)

*Ratkaisu.*

(a) Siirtämällä kaikki termit yhtälössä samalle puolella saadaan yhtälö $2x^2-5x+3 = 0$ (1 p.). Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2} = \frac{5\pm 1}{4}.$$
Ratkaisuksi saadaan $x = 1$ tai $x = \frac{3}{2}$ (1 p.).

(b) Yhtälö on määritelty, kun $x > 0$ ja $x - 3 > 0$, eli $x > 3$. Nyt $\lg x + \lg(x-3) = 1 \iff \lg x(x-3) = 1 \iff \lg x(x-3) = \lg 10$ (1 p.). Saadaan siis toisen asteen yhtälö $x^2 - 3x = 10 \iff x^2 - 3x - 10 = 0$, jonka ratkaisuksi saadaan $x = -2$ tai $x = 5$. Näistä alkuperäisen logaritmiyhtälön ratkaisuksi käy vain $x = 5$ (1 p.).

(c) Nyt $4\cos^2 x < 1 \iff \cos^2 x < \frac{1}{4} \iff -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$ (1 p.) $\iff \frac{\pi}{3}+n2\pi < x < \frac{2\pi}{3} + n2\pi$ tai $\frac{4\pi}{3} + n2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + n2\pi$ (1 p.) $\iff \frac{\pi}{3} + n\pi < x < \frac{2\pi}{3} + n\pi$, missä $n \in \mathbb{Z}$ (1 p.).

(d) Epäyhtälö $\frac{4x}{x-3} \leq 1$ on määritelty, kun $x \neq 3$. Saadaan $\frac{4x}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} \leq 0 \iff \frac{4x-(x-3)}{x-3} \leq 0 \iff \frac{3x+3}{x-3} \leq 0$ (1 p.). Osamäärän $\frac{3x+3}{x-3}$ merkki voi vaihtua kohdissa $x = -1$ ja $x = 3$ (1 p.). Huomataan, että osamäärä on ei-positiivinen, kun $-1 \leq x < 3$ (1 p.).

2. Määritä funktion $f(x) = \cos x \sin^5 x$ se integraalifunktio $F$, jolle $F(0) = 3$. (10 p.)

*Ratkaisu.* Nyt
$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \cos x \sin^5 x\,dx = \frac{1}{6}\sin^6 x + C. \quad (5 \text{ p.})$$
Saadaan
$$F(0) = \frac{1}{6}\sin^6(0) + C = 0 + C = 3, \quad (2 \text{ p.})$$
joten $C = 3$ (1 p.). Näin ollen kysytty integraalifunktio on
$$F(x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + 3. \quad (2 \text{ p.})$$

3. Suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusan pituus on 3, pyörähtää toisen kateettinsa ympäri. Laske näin syntyvän pyörähdyskappaleen suurin mahdollinen tilavuus. (10 p.)

*Ratkaisu.* Merkitään kolmion kateetteja $x$ ja $y$, jolloin $x^2+y^2 = 3^2 = 9$ (1 p.) ja näin ollen $y^2 = 9-x^2$. Kun kolmio pyörähtää sen kateetin ympäri, jonka pituus on $x$, niin syntyvän suoran ympyräkartion pohjan pinta-ala on $\pi y^2$ (1 p.). Edelleen, kartion tilavuus on

$$V(x) = \frac{x \cdot \pi y^2}{3} = \frac{\pi}{3}x(9-x^2) = \frac{\pi}{3}(9x-x^3). \quad \text{(2 p.)}$$

Tämän derivaatalle pätee

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}(9-3x^2) = \pi(3-x^2) = 0 \quad \text{(1 p.)}$$
$$\iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}. \quad \text{(1 p.)}$$

Koska $0 \le x \le 3$ ja $V(0) = V(3) = 0$ (1 p.), niin suurin tilavuus saavutetaan, kun $x = \sqrt{3}$ (1 p.). Tällöin kartion tilavuus on

$$V(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}(9 \cdot \sqrt{3} - (\sqrt{3})^3) = \frac{\pi}{3}(9\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) = 2\pi\sqrt{3}. \quad \text{(2 p.)}$$

4. Antti onnistuu rangaistuspotkussa todennäköisyydellä 0,8 ja Pekka onnistuu todennäköisyydellä 0,7. Kumpikin potkaisee yhden rangaistuspotkun. Mikä on todennäköisyys, että he
   (a) saavat kaksi maalia, (3 p.)
   (b) eivät saa yhtään maalia, (3 p.)
   (c) saavat yhden maalin? (4 p.)

*Ratkaisu.* Merkitään

$A$ = ”Antti tekee maalin rangaistuspotkusta”, jolloin $P(A) = 0{,}8$,

$B$ = ”Pekka tekee maalin rangaistuspotkusta”, jolloin $P(A) = 0{,}7$.

(a) Kertolaskuskusäännön perusteella

$$P(\text{”Antti ja Pekka saavat kaksi maalia”}) = P(A \cap B) \quad \text{(1 p.)}$$
$$= P(A)P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56 \ (\approx 0{,}6). \quad \text{(2 p.)}$$

(b) Komplementti- ja kertolaskuskusääntöjen perusteella

$$P(\text{”Antti ja Pekka eivät saa yhtään maalia”}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) \quad \text{(1 p.)}$$
$$= (1-0{,}8) \cdot (1-0{,}7) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06. \quad \text{(2 p.)}$$

(c) Komplementti-, yhteenlasku- ja kertolaskuskusääntöjen perusteella

$$P(\text{”Antti ja Pekka saavat yhden maalin”}) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \quad \text{(1 p.)}$$
$$= P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) \quad \text{(1 p.)}$$
$$= 0{,}8 \cdot (1-0{,}7) + 0{,}7 \cdot (1-0{,}8) = 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \quad \text{(1 p.)}$$
$$= 0{,}24 + 0{,}14 = 0{,}38 \ (\approx 0{,}4). \quad \text{(1 p.)}$$

5. Lukujonon $(a_n)$ ensimmäinen jäsen on $a_1 = -2\frac{1}{3}$ ja muut jäsenet määritellään rekursiivisesti kaavalla $a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n = \frac{1}{2}$, kun $n = 1, 2, 3, \ldots$. Laske lukujonon
   (a) kolmas jäsen $a_3$, (2 p.)
   (b) yleinen $n$. jäsen $a_n$, (4 p.)
   (c) raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (4 p.)

*Ratkaisu.*

(a) Saadaan

$$a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}a_1\right) \quad \text{(1 p.)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{7}{27} = \frac{27}{54} + \frac{9}{54} - \frac{14}{54} = \frac{22}{54} = \frac{11}{27}. \quad \text{(1 p.)}$$

(b) Nyt $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}$ on ensimmäisen kertaluvun rekursioyhtälö (1 p.), jonka ratkaisu on (kaavan voi johtaa geometrisen lukujonon avulla)

$$a_n = -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}} \quad \text{(1 p.)}$$

$$= -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \quad \text{(1 p.)}$$

$$= -\frac{37}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}. \quad \text{(1 p.)}$$

(c) Kohdan (b) perusteella saadaan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{37}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4}\right) = 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \quad \text{(4 p.)}$$